http://maurimath.net/Espaceeleves.php

# FATIMETOU / Med EL HAFedh

## Integrales

ERRAJA

**Exercice 4**

Soit la fonction f definie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

on pose : $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ ; $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1})}\,dx$.

calculer $f'(x)$ ; en deduire $I$ et $J$

**Solution :**

① On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \quad \text{soit}$$

$$f'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

l'integrale $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Peut être sous la forme :

$$I = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,(x+\sqrt{x^2+1})\,dx$$

D'où $I = \left[\frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+1})^2\right]_0^1$

$$I = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}(2)^2$$

$$\boxed{\text{Enfin } I = \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}}$$

l'integrale $J = \int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Peut être sous la forme :

$$J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2}\,dx$$

d'où $J = \left[\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]_0^1$

$$J = \frac{-1}{1+\sqrt{2}} + 1.$$

$$\boxed{\text{Enfin } J = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}$$

Fatimetou / Med EL HAfedh

# Integrales

ERRAJa :

## Exercice 5

Soit f la fonction definie sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{1+\tan^{2012}x} ; 0\leq x< \\ f(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue, positive, decroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

2) Montrer que pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$ on a $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=1$

3) Interpréter le resultat précédent graphique. En deduire que $\int_0^{\pi/2} f(x)dx$ $\frac{\pi}{4}$

### Solution :

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+\tan^{2012}x} ; 0\leq x<\frac{\pi}{2} \\ f(\frac{\pi}{2})=0\end{cases}$

① f est continue positive decroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

• $\lim f(x) = \lim \frac{1}{1+\tan^{2012}} = \boxed{\frac{1}{1+\pm\infty}}$

$=\frac{1}{+\infty}=0=f(\frac{\pi}{2})$

f est continue en $\frac{\pi}{2}$

• $0\leq \sin x\leq \frac{\pi}{2}$

$0\leq \sin\leq 1$

$0\leq \cos x\leq 1$ $\Rightarrow \tan x\geq 0$

$\Rightarrow \tan^{2012}x\geq 0\Rightarrow 1+\tan^{2012}x\geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{1+\tan^{2012}x}\geq 0\Rightarrow f(x)\geq 0$

$\frac{(2012\tan^{2012}x(1+\tan^2x)}{(1+\tan^{2012}x)^2}$

• $f'(x)=-\frac{(1+\tan^{2012}x)'}{(1+\tan^{2012}x)^2}=$

$\frac{-2012\tan^{2012}x(1+\tan^2x)}{(1+\tan^{2012}x)^2}$

$\frac{-2012\tan^{2012}x-2012\tan^{2013}x}{(1+\tan^{2012}x)^2}\leq 0$

f est stictement décroissante sur $[0;\frac{\pi}{2}]$

② $\forall x\in[0;\frac{\pi}{2}]$ $f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=$

$f(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{1}{1+\tan^{2012}(\frac{\pi}{2}-x)}=\frac{1}{1+\tan^{2012}x}$

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=\frac{1}{1+\cot^{2012}x}+\frac{1}{1+\tan^{2012}x}$

$\frac{1+\tan^{2012}x+1+\cot x^{2012}}{(1+\tan^{2012}x)(1+\tan^{2012}x)}$

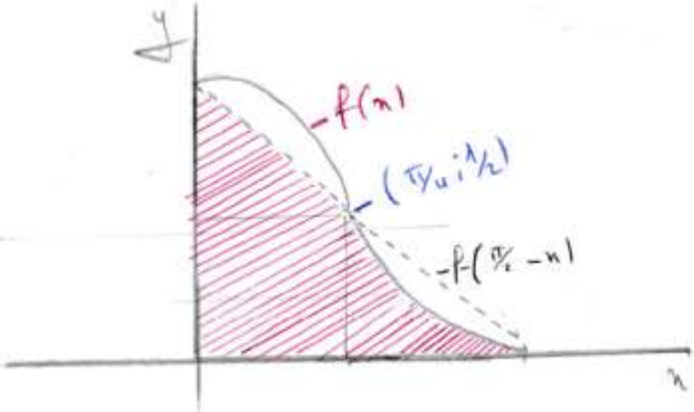
$1+\tan x^{2012}-\frac{1}{\cot^{2012}x}$ ; $1+\cot^{2012}x=\frac{1}{\sin^{2012}x}$

$f(\frac{\pi}{2}-x)+f(x)=\frac{\frac{\sin^{2012}+\cos^{2012}x}{\sin x^{2012}\cdot\cos^{2012}}}{\frac{1}{\sin^{2012}\cdot\cos^{2012}x}}=$

$f(\pi/2 - x) + f(x) = 1$

$\Rightarrow$ le point $I(\frac{\pi}{4} ; 1/2)$ est un centre de symetrie de $C_f$

$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \pi/4$




on a $f(\pi/2 - x) + f(x) = 1$

$\int_0^{\pi/2} (f(\pi/2 - x) + f(x))\,dx = [x]_0^{\pi/2}$

$\int_0^{\pi/2} (f(\pi/2 - x) + f(x))\,dx = \pi/2$

or $I(\pi/4 ; 1/2)$ est un centre de symetrie de $C_f$ donc

$\int_0^{\pi/2} f(\pi/2 - x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\pi/2 - x) + f(x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = 1/2 \int_0^{\pi/2} (f(\pi/2 - x) + f(x))\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \frac{\pi/2}{2} = \boxed{\pi/4}$

Fatimetou / Med El Hafedh

7c

# Integrales :

Erraja

**Exercice 7** soit F la fonction sur $[0; \pi/2]$ par : $F(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\, dt$.

① Montrer que F est une fonction affine

② Donner l'expression de F(x)

Solution

f est definie sur $[0; \pi/2]$

Par $f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$

1) Montrer que f' est une fonction affine on dit verifie que $f(x) = ck$

$f(x) = \cos x \cdot \sqrt{1-\sin^2 x} - \sin x \sqrt{1-\cos^2 x}$

$= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = x + b}$

2) Pour calculer on cherche l'image de 0 par la fonction

$f(0) = \int_{\cos 0}^{\sin 0} \sqrt{1-t^2}\, dt$

$\int_1^0 \sqrt{1-t^2}\, dt$

$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$

$-\left[\frac{2}{3}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\right]_0^1$

$= -\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$\boxed{f(x) = x + \frac{2}{3}}$